DÉNOMBREMENT DES ÉCHELLES ET DES MODES DANS LES SYSTÈMES MICRO-TEMPÉRÉS

Ballon Fabien

Novembre 2004

Résumé

On expose ici une méthode permettant de dénombrer les échelles et les modes des systèmes musicaux en tempérament égal à n degrés par octave (n–T.E), et ce, quelque soit l'entier n. On donne dans un premier temps quelques définitions. Dans un second, on expose les grandes lignes de la démonstration de la méthode, et enfin on donne pour exemple, le dénombrement détaillé pour $n = 2$ à 24. Ce travail donne suite à celui de Franck Jedrzejewski (voir [1]) et au travail (laborieux) de Jean-Pierre Poulin (voir [2]).

1 Définitions – Position du problème.

1.1 Le n–T.E.

Il s'agit du système musical à n degrés par octave, tel que l'intervalle entre deux degrés consécutifs est constant. Une de ses représentations possibles est illustrée sur la figure 1.

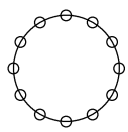

Fig. 1 – Représentation du 12–T.E. Le cercle correspond à l'octave et l'espacement entre deux points consécutifs, à un demi–ton tempéré. En tournant dans le sens des aiguilles d'une montre, les degrés sont de plus en plus hauts.

1.2 Une échelle.

Il s'agit d'un choix particulier de degrés du système musical considéré. Le nombre de ses degrés varie entre 1 et n pour le n–T.E. Sa représentation est illustrée sur la figure 2. Il se peut que des choix différents de degrés du n–T.E

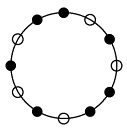

FIG. 2 – Représentations de l'échelle diatonique dans le 12–T.E. Les degrés de l'échelle sont en noir. La représentation de droite se déduit de celle de gauche par une rotation.

conduisent à la même échelle, comme le montre la figure 2. Pour toute les échelles, il existe au plus n représentations.

1.3 Un mode.

Il s'agit d'une échelle avec un degré de référence. Sa représentation est illustrée sur la figure 3. Chaque échelle à k degrés donne au plus k modes.

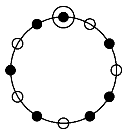

FIG. 3 – Représentations du mode ionien dans le 12–T.E. Le degré de référence est entouré d'un cercle.

1.4 Ordre d'une échelle – Echelles à nombre limité de modes (E.N.L.M).

On dit d'une échelle qu'elle est d'ordre l lorsque sa représentation est invariante par rotation d'angle $2\pi/l$, ce dernier devant être le plus petit possible. Une telle échelle aura donc un nombre limité de modes pour $l > 1$, et pour simplifier, on dira que c'est une E.N.L.M.

On pourrait être tenté de parler de modes d'ordre l, ce qui serait un abus de language puisque la présence du degré de référence rompt la symétrie ; On parlera donc de modes issus d'échelles d'ordre l. On "abrégera" l'expression "modes issus des E.N.L.M" par M.I.E.N.L.M.

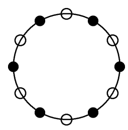

FIG. 4 – Représentation de l'échelle par ton dans le 12–T.E. Cette échelle est d'ordre 6, mais n'est pas d'odre 2, ni d'ordre 3, et elle n'a qun mode.

1.5 Position du problème.

Le dénombrement des échelles et des modes, est à première vue très simple. En fait un dénombrement "rapide" prend en compte plusieurs fois la même échelle. En effet, elles n'ont pas toutes n représentations possibles, et celles à k degrés, ne donnent pas nécessairement k modes, comme le montre la figure 4. En fait, les échelles qui risquent d'être comptées plusieurs fois sont les E.N.L.M, et le problème est de les dénombrer.

2 Dénombrement des modes.

2.1 Dénombrement global des modes.

Soit $M(n,k)$ le nombre de modes du n–T.E à k degrés. Commençons par choisir le degré de référence. Les n possibilités sont équivalentes. Il reste donc à choisir $k-1$ degrés parmis $n-1$. On a donc :

$$M(n,k) = \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} \ . \tag{1}$$

Soit $M(n)$ le nombre de modes du n–T.E. D'après (1), on a :

$$M(n) = \sum_{k=1}^{n} M(n,k) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = 2^{n-1} \ . \tag{2}$$

2.2 Dénombrement des M.I.E.N.L.M.

L'existence de M.I.E.N.L.M implique que n doit être strictement supérieur à l'unité. De ce fait, écrivons-le sous la forme :

$$n = \prod_{i=1}^{P(n)} p_i^{k_i} \ , \tag{3}$$

où $P(n)$ et les k_i sont des entiers strictement positifs, et les p_i des nombres premiers distincts les uns des autres et différents de l'unité. Notons également $\mathcal{M}(n)$ et $\mathcal{M}^*(n)$, respectivement l'ensemble des modes et des M.I.E.N.L.M du n–T.E.

Pour dénombrer les éléments de $\mathcal{M}^*(n)$, nous allons les construire à partir d'éléments de $\left\{\mathcal{M}\left(\frac{n}{p_i}\right)\right\}_{1\leq i\leq P(n)}$ en les mettant "bout à bout". Pour ce faire, on introduit l'application injective $f_{n,m} : \mathcal{M}\left(\frac{n}{m}\right) \longrightarrow \mathcal{M}^*(n)$, où m est un diviseur de n différent de l'unité, qui permet de faire cette construction. On donne un exemple de son fonctionnement sur la figure 5. En effet, il n'est pas

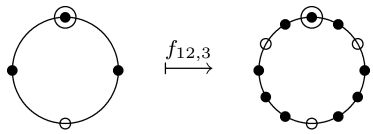

FIG. 5 – Exemple d'utilisation de l'application $f_{12,3}$. À un mode de $\mathcal{M}(4)$ (à gauche) est associé un M.I.E.N.L.M de $\mathcal{M}^*(12)$ (à droite) en répétant trois fois sa structure.

difficile de voir que :

$$\mathcal{M}^*(n) = \bigcup_{i=1}^{P(n)} f_{n,p_i}\left(\mathcal{M}\left(\frac{n}{p_i}\right)\right) \quad . \tag{4}$$

Il n'est pas non plus difficile de montrer que quelque soit les diviseurs de n différents de l'unité m_1 et m_2 tels que leur produit soit aussi un diviseur de n, on a :

$$f_{n,m_1}\left(\mathcal{M}\left(\frac{n}{m_1}\right)\right) \cap f_{n,m_2}\left(\mathcal{M}\left(\frac{n}{m_2}\right)\right) = f_{n,m_1m_2}\left(\mathcal{M}\left(\frac{n}{m_1m_2}\right)\right) \quad . \tag{5}$$

Enfin, on peut énoncer le théorème suivant, concernant m ensembles $\mathcal{E}_i$ avec $1 \leq i \leq m$:

$$\begin{aligned}\text{card}\left(\bigcup_{i=1}^{m}\mathcal{E}_i\right) = \sum_{l=1}^{m}(-1)^{l+1}\sum_{i_1=1}^{m-l+1}\;\sum_{i_2=i_1+1}^{m-l+2}\cdots \\ \sum_{i_l=i_{l-1}+1}^{m}\text{card}\left(\mathcal{E}_{i_1}\cap\mathcal{E}_{i_2}\cap\cdots\cap\mathcal{E}_{i_l}\right)\ ,\end{aligned} \tag{6}$$

et appliquons-le à (4) en utilisant (5) :

$$\operatorname{card}\left(\mathcal{M}^*(n)\right) = \sum_{l=1}^{P(n)} (-1)^{l+1} \sum_{i_1=1}^{P(n)-l+1} \sum_{i_2=i_1+1}^{P(n)-l+2} \dots \sum_{i_l=i_{l-1}+1}^{P(n)} \operatorname{card}\left(f_{n,p_{i_1}p_{i_2}\dots p_{i_l}}\left(\mathcal{M}\left(\frac{n}{p_{i_1}p_{i_2}\dots p_{i_l}}\right)\right)\right) . \tag{7}$$

Puisque $f_{n,m}$ est injective, quelque soit le diviseur m de n, on a :

$$\operatorname{card}\left(f_{n,m}\left(\mathcal{M}\left(\frac{n}{m}\right)\right)\right) = \operatorname{card}\left(\mathcal{M}\left(\frac{n}{m}\right)\right) = M\left(\frac{n}{m}\right) . \tag{8}$$

Utilisons enfin (2), et notons $M^*(n)$ le nombre de M.I.E.N.L.M du n–T.E. On obtient finalement :

$$M^*(n) = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{P(n)} (-1)^{l+1} \sum_{i_1=1}^{P(n)-l+1} \sum_{i_2=i_1+1}^{P(n)-l+2} \dots \sum_{i_l=i_{l-1}+1}^{P(n)} 2^{\frac{n}{p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_l}}} . \tag{9}$$

Un raisonnement similaire permet de déterminer le nombre de M.I.E.N.L.M à k degrés du n–T.E $M^*(n,k)$. Si $P(n,k)$ est le nombre de facteurs premiers différents de l'unité commun à n et à k, et qu'on les note q_i s'il en existe ($1 \leq i \leq P(n,k)$), alors on obtient :

$$M^*(n,k) = \sum_{l=1}^{P(n,k)} (-1)^{l+1} \sum_{i_1=1}^{P(n,k)-l+1} \sum_{i_2=i_1+1}^{P(n,k)-l+2} \dots \sum_{i_l=i_{l-1}+1}^{P(n,k)} \binom{\frac{n}{q_{i_1}q_{i_2}\cdots q_{i_l}} - 1}{\frac{k}{q_{i_1}q_{i_2}\cdots q_{i_l}} - 1} , \tag{10}$$

où par convention, les termes en $\sum_{l=1}^{0}$ sont considérés comme nuls.

3 Dénombrement des échelles.

Une échelle est soit une E.N.L.M, soit elle ne l'est pas. On utilise alors la notation suivante pour le nombre d'échelles du n–T.E à k degrés :

$$N(n,k) = \overline{N}(n,k) + N^*(n,k) , \tag{11}$$

où l'étoile désigne les E.N.L.M et le surlignement, celles qui n'en sont pas. Pour le nombre total d'échelle du n–T.E $N(n)$, on procède de façon similaire :

$$N(n) = \overline{N}(n) + N^*(n) . \tag{12}$$

3.1 Dénombrement des échelles qui ne sont pas des E.N.L.M.

Utilisons le fait qu'une échelle à k degrés qui n'est pas une E.N.L.M, a k modes. On a donc :

$$\overline{N}(n,k) = \frac{1}{k}\left[M(n,k) - M^*(n,k)\right] \ . \tag{13}$$

En utilisant le fait que les échelles à k degrés sont en même nombre que celles à $n-k$ degrés, on montre facilement que :

$$\overline{N}(n) = \frac{2}{n}\left[M(n) - M^*(n)\right] \ . \tag{14}$$

Tous les termes de (13) et de (14) sont donnés à la section précédente.

3.2 Dénombrement des E.N.L.M.

On peut classer les E.N.L.M suivant leur ordre. Les ordres possibles sont les diviseurs de n et distincts de l'unité ; Notons $\mathcal{D}_n^*$ cet ensemble. Il n'est pas difficile de voir que le nombre d'E.NL.M du n–T.E d'ordre m est le nombre d'échelles qui ne sont pas des E.N.L.M du $\frac{n}{m}$–T.E. Ainsi, on a :

$$N^*(n) = \sum_{m \in \mathcal{D}_n^*} \overline{N}\left(\frac{n}{m}\right) \ . \tag{15}$$

Par un raisonnement analogue, on a aussi :

$$N^*(n,k) = \sum_{m \in \mathcal{D}_n^* \cap \mathcal{D}_k^*} \overline{N}\left(\frac{n}{m}, \frac{k}{m}\right) \ . \tag{16}$$

Finalement, on peut reformuler (11) et (12) par :

$$N(n,k) = \sum_{m \in \mathcal{D}_n \cap \mathcal{D}_k} \overline{N}\left(\frac{n}{m}, \frac{k}{m}\right) \ , \tag{17}$$

et :

$$N(n) = \sum_{m \in \mathcal{D}_n} \overline{N}\left(\frac{n}{m}\right) \ , \tag{18}$$

où $\mathcal{D}_n$ désigne l'ensemble des diviseurs de n (y compris l'unité).

4 Étude de quelques cas particuliers.

On cherche dans cette section à donner une expression plus directe des nombres d'échelles $N(n)$ et $N^*(n)$ et du nombre de M.I.E.N.L.M $M^*(n)$. On note $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers distincts de l'unité.

4.1 Cas où $n = p^k$, $p \in \mathbb{P}$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Dans ce cas, $P(n) = 1$ et (9) donne directement :

$$M^*(p^k) = \frac{1}{2} 2^{p^{k-1}} \ . \tag{19}$$

En utilisant le fait que les diviseurs m de n sont de la forme $m = p^i$ avec $0 \leq i \leq k$, on obtient de (18), (14) et (15) :

$$N(p^k) = 1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p^i} \left(2^{p^i} - 2^{p^{i-1}} \right) \ , \tag{20}$$

ainsi que :

$$N^*(p^k) = 1 + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{p^i} \left(2^{p^i} - 2^{p^{i-1}} \right) \ , \tag{21}$$

toujours avec la convention de ne pas prendre en compte les termes $\sum_{i=1}^{0}$.

4.2 Cas où $n = p^k q$, $(p, q) \in \mathbb{P}^2$, $p \neq q$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Il s'agit par exemple du cas des systèmes acoustiques des demis-ton, des quarts de ton, des huitièmes de ton ... Dans ce cas, $P(n) = 2$ et (9) donne :

$$M^*(p^k q) = \frac{1}{2} \left(2^{p^{k-1} q} + 2^{p^k} - 2^{p^{k-1}} \right) \ . \tag{22}$$

De (18), (14) et (15), il vient :

$$N(p^k q) = N(p^k) + N(q) - 1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p^i q} \left(2^{p^i q} - 2^{p^i} + 2^{p^{i-1}} - 2^{p^{i-1} q} \right) \ , \tag{23}$$

et :

$$N^*(p^k q) = N(p^k) + N(q) - 1 + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{p^i q} \left(2^{p^i q} - 2^{p^i} + 2^{p^{i-1}} - 2^{p^{i-1} q} \right) \ , \tag{24}$$

où les expressions de $N(p^k)$ et $N(q)$ sont données par (20).
Ainsi, il n'est pas difficile de dénombrer les possibilités des seizièmes de ton, ce qui est une première, à ma connaissance (voir [1]).

5 Applications.

5.1 Dénombrement global des échelles.

n	$N(n)$	$N^*(n)$
2	2	1
3	3	1
4	5	2
5	7	1
6	13	4
7	19	1
8	35	5
9	59	3
10	107	8
11	187	1
12	351	16
13	631	1
14	1 181	20
15	2 191	9
16	4 115	35
17	7 711	1
18	14 601	69
19	27 595	1
20	52 487	110
21	99 879	21
22	190 745	188
23	364 723	1
24	699 251	381
30	35 792 567	2 300
31	69 273 667	1
36	1 908 881 899	14 939
48	5 864 062 367 251	703 331
53	169 947 155 749 831	1
72	65 588 423 374 144 427 519	1 909 580 799
96	825 293 359 523 589 782 053 586 451	5 864 196 582 931

5.2 Dénombrement global des modes.

n	$M(n)$	$M^*(n)$
2	2	1
3	4	1
4	8	2
5	16	1
6	32	5
7	64	1
8	128	8
9	256	4
10	512	17
11	1 024	1
12	2 048	38
13	4 096	1
14	8 192	65
15	16 384	19
16	32 768	128
17	65 536	1
18	131 072	284
19	262 144	1
20	524 288	518
21	1 048 576	67
22	2 097 152	1 025
23	4 194 304	1
24	8 388 608	2 168
30	536 870 912	16 907
31	1 073 741 824	1
36	34 359 738 368	133 088
48	140 737 488 355 328	8 421 248
53	4 503 599 627 370 496	1
72	2 361 183 241 434 822 606 848	34 368 124 928
96	39 614 081 257 132 168 796 771 975 168	140 739 635 806 208

5.3 Dénombrement des échelles et des modes suivant leur nombre de degrés.

$n = 2$.

k	$N(2,k)$	$N^*(2,k)$	$M(2,k)$	$M^*(2,k)$
1	1	0	1	0
2	1	1	1	1

$n = 3$.

k	$N(3,k)$	$N^*(3,k)$	$M(3,k)$	$M^*(3,k)$
1	1	0	1	0
2	1	0	2	0
3	1	1	1	1

$n = 4$.

k	$N(4,k)$	$N^*(4,k)$	$M(4,k)$	$M^*(4,k)$
1	1	0	1	0
2	2	1	3	1
3	1	0	3	0
4	1	1	1	1

$n = 5$. Système Slendro.

k	$N(5,k)$	$N^*(5,k)$	$M(5,k)$	$M^*(5,k)$
1	1	0	1	0
2	2	0	4	0
3	2	0	6	0
4	1	0	4	0
5	1	1	1	1

$n = 6$. Système des tons.

k	$N(6,k)$	$N^*(6,k)$	$M(6,k)$	$M^*(6,k)$
1	1	0	1	0
2	3	1	5	1
3	4	1	10	1
4	3	1	10	2
5	1	0	5	0
6	1	1	1	1

$n = 7$. Système "Thaï-Khmer".

k	$N(7,k)$	$N^*(7,k)$	$M(7,k)$	$M^*(7,k)$
1	1	0	1	0
2	3	0	6	0
3	5	0	15	0
4	5	0	20	0
5	3	0	15	0
6	1	0	6	0
7	1	1	1	1

$n = 8$.

k	$N(8,k)$	$N^*(8,k)$	$M(8,k)$	$M^*(8,k)$
1	1	0	1	0
2	4	1	7	1
3	7	0	21	0
4	10	2	35	3
5	7	0	35	0
6	4	1	21	3
7	1	0	7	0
8	1	1	1	1

$n = 9$.

k	$N(9,k)$	$N^*(9,k)$	$M(9,k)$	$M^*(9,k)$
1	1	0	1	0
2	4	0	8	0
3	10	1	28	1
4	14	0	56	0
5	14	0	70	0
6	10	1	56	2
7	4	0	28	0
8	1	0	8	0
9	1	1	1	1

$n = 10$.

k	$N(10,k)$	$N^*(10,k)$	$M(10,k)$	$M^*(10,k)$
1	1	0	1	0
2	5	1	9	1
3	12	0	36	0
4	22	2	84	4
5	26	1	126	1
6	22	2	126	6
7	12	0	84	0
8	5	1	36	4
9	1	0	9	0
10	1	1	1	1

$n = 11$.

k	$N(11,k)$	$N^*(11,k)$	$M(11,k)$	$M^*(11,k)$
1	1	0	1	0
2	5	0	10	0
3	15	0	45	0
4	30	0	120	0
5	42	0	210	0
6	42	0	252	0
7	30	0	210	0
8	15	0	120	0
9	5	0	45	0
10	1	0	10	0
11	1	1	1	1

$n = 12$. Système des demis-ton.

k	$N(12,k)$	$N^*(12,k)$	$M(12,k)$	$M^*(12,k)$
1	1	0	1	0
2	6	1	11	1
3	19	1	55	1
4	43	3	165	5
5	66	0	330	0
6	80	5	462	12
7	66	0	462	0
8	43	3	330	10
9	19	1	165	3
10	6	1	55	5
11	1	0	11	0
12	1	1	1	1

$n = 13$. Sytème de Bohlen-Pierce en tempérament égal (en remplacant l'octave par la quinte de l'octave[1]).

k	$N(13,k)$	$N^*(13,k)$	$M(13,k)$	$M^*(13,k)$
1	1	0	1	0
2	6	0	12	0
3	22	0	66	0
4	55	0	220	0
5	99	0	495	0
6	132	0	792	0
7	132	0	924	0
8	99	0	792	0
9	55	0	495	0
10	22	0	220	0
11	6	0	66	0
12	1	0	12	0
13	1	1	1	1

[1]En effet rien ne nous empêche de nous baser sur l'octave, dans notre raisonnement, ce rapport n'intervient pas.

$n = 14.$

k	$N(14,k)$	$N^*(14,k)$	$M(14,k)$	$M^*(14,k)$
1	1	0	1	0
2	7	1	13	1
3	26	0	78	0
4	73	3	286	6
5	143	0	715	0
6	217	5	1 287	15
7	246	1	1 716	1
8	217	5	1 716	20
9	143	0	1 287	0
10	73	3	715	15
11	26	0	286	0
12	7	1	78	6
13	1	0	13	0
14	1	1	1	1

$n = 15.$

k	$N(15,k)$	$N^*(15,k)$	$M(15,k)$	$M^*(15,k)$
1	1	0	1	0
2	7	0	14	0
3	31	1	91	1
4	91	0	364	0
5	201	1	1 001	1
6	335	2	2 002	4
7	429	0	3 003	0
8	429	0	3 432	0
9	335	2	3 003	6
10	201	1	2 002	2
11	91	0	1 001	0
12	31	1	364	4
13	7	0	91	0
14	1	0	14	0
15	1	1	1	1

$n = 16$. Système Armodue.

k	$N(16,k)$	$N^*(16,k)$	$M(16,k)$	$M^*(16,k)$
1	1	0	1	0
2	8	1	15	1
3	35	0	105	0
4	116	4	455	7
5	273	0	1 365	0
6	504	7	3 003	21
7	715	0	5 005	0
8	810	10	6 435	35
9	715	0	6 435	0
10	504	7	5 005	35
11	273	0	3 003	0
12	116	4	1 365	21
13	35	0	455	0
14	8	1	105	7
15	1	0	15	0
16	1	1	1	1

$n = 17$.

k	$N(17,k)$	$N^*(17,k)$	$M(17,k)$	$M^*(17,k)$
1	1	0	1	0
2	8	0	16	0
3	40	0	120	0
4	140	0	560	0
5	364	0	1 820	0
6	728	0	4 368	0
7	1 144	0	8 008	0
8	1 430	0	11 440	0
9	1 430	0	12 870	0
10	1 144	0	11 440	0
11	728	0	8 008	0
12	364	0	4 368	0
13	140	0	1 820	0
14	40	0	560	0
15	8	0	120	0
16	1	0	16	0
17	1	1	1	1

$n = 18$. Système des tiers de ton.

k	$N(18,k)$	$N^*(18,k)$	$M(18,k)$	$M^*(18,k)$
1	1	0	1	0
2	9	1	17	1
3	46	1	136	1
4	172	4	680	8
5	476	0	2 380	0
6	1 038	12	6 188	32
7	1 768	0	12 376	0
8	2 438	14	19 448	56
9	2 704	4	24 310	10
10	2 438	14	24 310	70
11	1 768	0	19 448	0
12	1 038	12	12 376	64
13	476	0	6 188	0
14	172	4	2 380	28
15	46	1	680	5
16	9	1	136	8
17	1	0	17	0
18	1	1	1	1

$n = 19$. Système de Salinas.

k	$N(19,k)$	$N^*(19,k)$	$M(19,k)$	$M^*(19,k)$
1	1	0	1	0
2	9	0	18	0
3	51	0	153	0
4	204	0	816	0
5	612	0	3 060	0
6	1 428	0	8 568	0
7	2 652	0	18 564	0
8	3 978	0	31 824	0
9	4 862	0	43 758	0
10	4 862	0	48 620	0
11	3 978	0	43 758	0
12	2 652	0	31 824	0
13	1 428	0	18 564	0
14	612	0	8 568	0
15	204	0	3 060	0
16	51	0	816	0
17	9	0	153	0
18	1	0	18	0
19	1	1	1	1

$n = 20$.

k	$N(20,k)$	$N^*(20,k)$	$M(20,k)$	$M^*(20,k)$
1	1	0	1	0
2	10	1	19	1
3	57	0	171	0
4	245	5	969	9
5	776	1	3 876	1
6	1 944	12	11 628	36
7	3 876	0	27 132	0
8	6 310	22	50 388	84
9	8 398	0	75 582	0
10	9 252	27	92 378	128
11	8 398	0	92 378	0
12	6 310	22	75 582	126
13	3 876	0	50 388	0
14	1 944	12	27 132	84
15	776	1	11 628	3
16	245	5	3 876	36
17	57	0	969	0
18	10	1	171	9
19	1	0	19	0
20	1	1	1	1

$n = 21$.

k	$N(21,k)$	$N^*(21,k)$	$M(21,k)$	$M^*(21,k)$
1	1	0	1	0
2	10	0	20	0
3	64	1	190	1
4	285	0	1 140	0
5	969	0	4 845	0
6	2 586	3	15 504	6
7	5 538	1	38 760	1
8	9 690	0	77 520	0
9	14 000	5	125 970	15
10	16 796	0	167 960	0
11	16 796	0	184 756	0
12	14 000	5	167 960	20
13	9 690	0	125 970	0
14	5 538	1	77 520	2
15	2 586	3	38 760	15
16	969	0	15 504	0
17	285	0	4 845	0
18	64	1	1 140	6
19	10	0	190	0
20	1	0	20	0
21	1	1	1	1

$n = 22$.

k	$N(22,k)$	$N^*(22,k)$	$M(22,k)$	$M^*(22,k)$
1	1	0	1	0
2	11	1	21	1
3	70	0	210	0
4	335	5	1 330	10
5	1 197	0	5 985	0
6	3 399	15	20 349	45
7	7 752	0	54 264	0
8	14 550	30	116 280	120
9	22 610	0	203 490	0
10	29 414	42	293 930	210
11	32 066	1	352 716	1
12	29 414	42	352 716	252
13	22 610	0	293 930	0
14	14 550	30	203 490	210
15	7 752	0	116 280	0
16	3 399	15	54 264	120
17	1 197	0	20 349	0
18	335	5	5 985	45
19	70	0	1 330	0
20	11	1	210	10
21	1	0	21	0
22	1	1	1	1

$n = 23$.

k	$N(23,k)$	$N^*(23,k)$	$M(23,k)$	$M^*(23,k)$
1	1	0	1	0
2	11	0	22	0
3	77	0	231	0
4	385	0	1 540	0
5	1 463	0	7 315	0
6	4 389	0	26 334	0
7	10 659	0	74 613	0
8	21 318	0	170 544	0
9	35 530	0	319 770	0
10	49 742	0	497 420	0
11	58 786	0	646 646	0
12	58 786	0	705 432	0
13	49 742	0	646 646	0
14	35 530	0	497 420	0
15	21 318	0	319 770	0
16	10 659	0	170 544	0
17	4 389	0	74 613	0
18	1 463	0	26 334	0
19	385	0	7 315	0
20	77	0	1 540	0
21	11	0	231	0
22	1	0	22	0
23	1	1	1	1

$n = 24$. Système des quarts de ton.

k	$N(24,k)$	$N^*(24,k)$	$M(24,k)$	$M^*(24,k)$
1	1	0	1	0
2	12	1	23	1
3	85	1	253	1
4	446	6	1 771	11
5	1 771	0	8 855	0
6	5 620	22	33 649	61
7	14 421	0	100 947	0
8	30 667	43	245 157	165
9	54 484	7	490 314	21
10	81 752	66	817 190	330
11	104 006	0	1 144 066	0
12	112 720	88	1 352 078	494
13	104 006	0	1 352 078	0
14	81 752	66	1 144 066	462
15	54 484	7	817 190	35
16	30 667	43	490 314	330
17	14 421	0	245 157	0
18	5 620	22	100 947	183
19	1 771	0	33 649	0
20	446	6	8 855	55
21	85	1	1 771	7
22	12	1	253	11
23	1	0	23	0
24	1	1	1	1

Références

[1] Franck Jedrzejewski. *Modes à transpositions limitées dans les espaces micro-tempérés.* `http://recherche.ircam.fr/equipes/repmus/mamux/documents/tablelimited.pdf`

[2] Jean-Pierre Poulin. *La petite encyclopédie des échelles et des modes.* I.S.B.N 2–9506070–3–9, avril 2001. `http://jeanpierre.poulin.free.fr`